大学の物理教育 Vol. 21, No. 3, p. 126 (2015) 著者最終稿

# LC 共振回路で光速を測る

2015 年 11 月 25 日

北 野 正 雄　　京都大学大学院工学研究科

## 1　はじめに

光の速さは日常的なスケールでは, 無限と見なしても差し支えないほど大きく, その測定は容易ではない. 歴史的には天文学的現象から, 光速の有限性が認識され, 大まかな値が求められた. 地上において, 直接的な測定によって, 意味のある結果が得られるようになったのは, 19 世紀半ばになってからである [1]. 鏡やチョッパーを高速で回転させる Foucault や Fizeau の実験を学生実験で再現することは, やや困難である. しかし, エレクトロニクスの力を借りて, 強度変調された半導体レーザと光検出器, オシロスコープを用いれば, 容易に測ることができる.

現在は真空中の光の速度は $c_0 = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ と定義されている. これは原子時計で得られる $1\,\mathrm{s}$ と組み合わせて, 長さの単位 $1\,\mathrm{m}$ の大きさを定義するためである. したがって, 現在は光の速度が専門家によって測られることはないが, 光速のおよその値を実測することに教育的な意味はある [2].

同じく 19 世紀の半ばに, やや風変わりな光速の測定が行われた. Weber と Kohlrausch は, 電気力を基準に定められた電荷の大きさと磁気力を基準に定められた電流から決まる電荷の大きさの比を求める実験を行った [3, 4]. 具体的には, 当時使われていた 2 つの単位系, すなわち, 静電単位系 (esu), 電磁単位系 (emu) における電荷の大きさの比であり, 速度の次元を持っている. 測定結果は $q_{\mathrm{esu}}/q_{\mathrm{emu}} \sim 3.1 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ となり, 直接的に測定されていた光の速度と符合した. Maxwell はこれを偶然の一致ではなく, 光が電磁気的な波動であることの帰結であると確信し, その理論的裏付けを行うとともに, 自分自身でも実験を行った. 彼は「この光速の測定法において、光は測定器を見るのにしか使われていない」と冗談まじりに述べている [5]. 長年追求されてきた光の本性がついに明らかにされた重要な実験である.

この時代を画する実験を教育目的で再現するのは意義のあることだが, いくつかの困難が存在する. 電気力に比べて磁気力は弱いため, 大きい電流が必要とされ, かなり大きい初期電荷を準備しなければならない. 通常, コンデンサを数 kV まで充電する必要がある. また, 力の測定にも工夫が必要である. さらに, 過去の単位系に関する知識も必要である.

ここでは, エレクトロニクスの助けを借りた, 現代版 Weber-Kohlrausch の実験を提案したい. 電荷比 $q_{\mathrm{esu}}/q_{\mathrm{emu}}$ は, 国際単位系 (SI) において,

$$c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \tag{1}$$

に等しい. 真空の透磁率 $\mu_0$ と真空の誘電率 $\varepsilon_0$ は, それぞれコイルとコンデンサのリアクタンス測定により求められるので, 2 節で示すように机上実験で光速 $c_0$ を知ることができる. さらに 4 節では, LC 共振器の共鳴周波数から $c_0$ を測る方法も提案する. 具体的な実験の詳細は [6] にゆずり, ここでは主に測定の原理と歴史的経緯を述べる.

## 2　リアクタンス測定による $c_0$ の決定

電極の面積 $S_C$, 間隔 $d_C$ の空気コンデンサのキャパシタンスを求めよう. $S_C \gg d_C^2$ の場合, 電極間

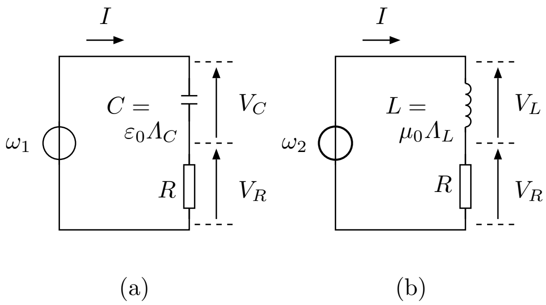


図 1: コンデンサとコイルのリアクタンス測定により $\varepsilon_0$, $\mu_0$ を定め, 光速 $c_0$ を求める.

の場, すなわち電束密度 $D$ と電場 $E$ は一様となる. 全電荷 $Q$, 極板間の電圧 $V_C$ は, $Q = D \cdot S_C$, $V_C = E \cdot d_C$ と表せるので, キャパシタンスは

$$C := \frac{Q}{V_C} = \varepsilon_0 \frac{S_C}{d_C} = \varepsilon_0 \Lambda_C, \tag{2}$$

となる. 関係 $D = \varepsilon_0 E$ を用いた. コンデンサの等価長さ $\Lambda_C := S_C/d_C$ は幾何学的構造できまる. 2 種類の場を関係づける $\varepsilon_0$ が, 電気的な量と幾何学的な量を結びつけていることに注目したい. 電圧 $V_C$ の時間変化は, 電荷の変化を通して, コンデンサの電流となる: $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = C(\mathrm{d}V_C/\mathrm{d}t)$.

図 1(a) のように, コンデンサ $C$ と基準抵抗 $R$ を直列につないだものに, 角周波数 $\omega_1$ の電圧源を接続する. 電流を $I = \hat{I} \cos \omega_1 t$ とおく. 以後, “ ^ ” は正弦波の振幅を表す. $V_C = \hat{I}/(\omega_1 C) \sin \omega_1 t$, $V_R = R\hat{I} \cos \omega_1 t$ であり, 電圧比は

$$k_1 := \frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_R} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega_1 C R} \tag{3}$$

と表せる. $X_C = 1/(\omega_1 C)$ はコンデンサのリアクタンスである. 式 (2) と組み合わせると,

$$\varepsilon_0 = 1/(k_1 R \omega_1 \Lambda_C) \tag{4}$$

が実験的に求められることが分かる. 電圧は比だけが重要であり, 絶対的な値は不要である. 一方, 基準抵抗 $R$ と電源の角周波数 $\omega_1$ の値は既知でなければならない. $\Lambda_C$ を決めるために, $S_C$, $d_C$ を正確に測る必要がある.

次に, 細長い空芯ソレノイドコイルのインダクタンスを求めよう. 断面積, 長さ, 巻き数をそれぞれ $S_L$, $l_L$, $N_L$ とする. $S_L \ll l_L^2$ の場合, ソレノイドコイルの中の場, すなわち磁場の強さ $H$, 磁束密度 $B$ は一様である. 全磁束 $\Phi$, コイルの電流 $I$ は, $\Phi = B \cdot (N_L S_L)$, $I = H \cdot (l_L/N_L)$ であり, インダクタンスは

$$L := \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N_L^2 S_L}{l_L} = \mu_0 \Lambda_L, \tag{5}$$

となる. 関係 $B = \mu_0 H$ を用いた. コイルの等価長さ $\Lambda_L := N_L^2 S_L / l_L$ は幾何学的構造できまる. $I$ の時間変化は磁束 $\Phi$ の変化を介して, コイルの電圧となる: $V_L = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = L(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)$.

図 1(b) のように, コイル $L$ と基準抵抗 $R$ を直列につないだものに, 角周波数 $\omega_2$ の電圧源を接続する. コンデンサの場合と同様に, 電圧比は

$$k_2 := \frac{\hat{V}_L}{\hat{V}_R} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_2 L}{R} \tag{6}$$

と表わされる. $X_L = \omega_2 L$ はコイルのリアクタンスである. 電圧比 $k_2$ を測定することにより,

$$\mu_0 = k_2 R/(\omega_2 \Lambda_L) \tag{7}$$

を実験的に求めることができる. コイルの巻線抵抗の影響は必要に応じて考慮すればよい.

このように測定された $\mu_0$, $\varepsilon_0$ から光速 $c_0$ を定めることができる. すなわち, 式 (4), (7) より

$$c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \sqrt{k_1/k_2}\sqrt{\omega_1 \omega_2 \Lambda_L \Lambda_C}. \tag{8}$$

ここでは, 電圧比, 周波数, 幾何学因子のみが重要であり, 共通の抵抗を使っていれば, $R$ の値は影響しない. LCR メータなど, $L$, $C$ の値を直接表示する測定装置があれば, より簡単に $c_0 = \sqrt{\Lambda_L \Lambda_C / LC}$ と求めることができる [6].

さらに, 電磁気学におけるもう一つの重要な定数である真空のインピーダンス $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ も同様にして求めることができる.

## 3 Weber-Kohlrausch の実験

2 節の実験と Weber-Kohlrausch の実験の関係を見ておこう．後者は, 同じ電荷 $q$ を esu 系, emu 系でそれぞれ測った場合の比 $q_{\mathrm{esu}}/q_{\mathrm{emu}}$ を定めている．ここでは, 古い単位系に関する知識がなくても理解できるよう, SI の枠組みで調べ直す [7]．まず, クーロンの法則における係数が 1 になるように電荷を再定義する: $q_{\mathrm{esu}} = q/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$ (単位は $\sqrt{\mathrm{N}}\,\mathrm{m}$)．同様に, アンペールの法則における係数が 1 になるよう電流を $I_{\mathrm{emu}} = I\sqrt{\mu_0/4\pi}$ (単位は $\sqrt{\mathrm{N}}$) と再定義する．対応する電荷は $q_{\mathrm{emu}} = q\sqrt{\mu_0/4\pi}$ となる．同じ電荷 $q$ を電気力, 磁気力を基準に測った $q_{\mathrm{esu}}$, $q_{\mathrm{emu}}$ を比較すると, $q_{\mathrm{esu}}/q_{\mathrm{emu}} = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = c_0$ となる．

当時は電磁気的な量を, 力学量に還元することが定量的な研究を進める上で決定的に重要であった．後者の再現性, 精度における優位性や, 電荷や電流の実体である電子などが未だ発見されていなかったためである． 電磁量の力学量への還元は「絶対測定」と呼ばれた．そこでは, 電気力, 磁気力という 2 つの選択肢があり, それらの比較が予想外の大発見につながったのである [8]．現代では, 電磁量に比べて, 力学量の方が不確かさが大きい状況であり, 光や原子, 電子の性質を利用した「量子標準」への移行が進んでいる．現時点での, 力によるアンペアの定義は「絶対測定」という過去の遺産である．実際的には, 量子ホール効果やジョゼフソン効果による抵抗標準や電圧標準が利用されているし, アンペアの定義も近い将来, 素電荷を基準にしたものに変更される予定である．

なお, 2 節の実験は, 同じ抵抗 $R$ を esu, emu それぞれで, $R_{\mathrm{esu}} = 1/(k_1\omega_1\Lambda_C)$, $R_{\mathrm{emu}} = \omega_2\Lambda_L/k_2$ と測定しているとも解釈でき, Weber-Kohlrausch 風に $c_0 = \sqrt{R_{\mathrm{emu}}/R_{\mathrm{esu}}}$ と表すことができる．

## 4 LC 共振器を用いた $c_0$ の測定

2 節で述べたリアクタンスによる方法は簡単ではあるが, 2 つの独立の実験で求めた 2 つの定数 $\varepsilon_0$, $\mu_0$ から計算で光速 $c_0$ を求めるという点で面白みに欠ける．1 つの実験で直接的に求める方法を考えよう．式 (8) は, $\omega_1 = \omega_2$, $k_1 = k_2$ とすると簡単になる．このとき, 式 (3), (6) は LC 共振器における共振条件 $\omega L = 1/(\omega C)$ になる．したがって, LC 共振器を用いて光速測定ができる可能性がある．図 2 の共振回路を考える．電流測定用抵抗を $R$, コイルの抵抗や電源の内部抵抗などを $r$ で表す．

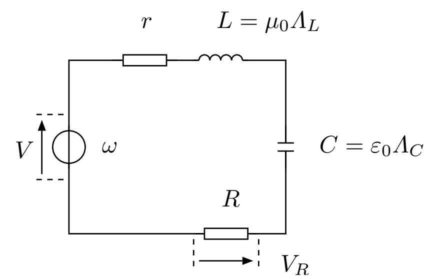


図 2: LC 共振回路による $c_0$ の測定.

電源の振幅を $\hat{V}$, 角周波数を $\omega$ とすると, 回路に流れる電流の振幅は

$$\hat{I} = \hat{V}\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + (r+R)^2\right]^{-1/2} \tag{9}$$

である．$\omega$ が共振角周波数

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \tag{10}$$

に等しいとき, 電流の振幅は最大になる．電源電圧の振幅 $\hat{V}$ を一定に保ち, 角周波数 $\omega$ を変化させ, 電流が最大にすることで $\omega_0$ が求められる．ここでは, 電圧や電流の絶対的な値は必要とされない．

式 (10) に, $L = \mu_0\Lambda_L$, $C = \varepsilon_0\Lambda_C$ を代入すれば,

$$c_0 = \omega_0\sqrt{\Lambda_L\Lambda_C} = 2\pi\Lambda/T \tag{11}$$

となり, 光速が決定できる．ここで, $\Lambda := \sqrt{\Lambda_L\Lambda_C}$ は幾何学的因子, $T := 2\pi/\omega_0$ は共鳴角周波数に対応する周期 (時間) である．電磁気的な基準量を用いず, ものさしと時計（発振器）のみを基準に光速 $c_0$ を測定していることになる．

共鳴幅の抵抗依存性を求めることにより, $Z_0$ を決定することもできる [6].

## 5 LC 共振器で光速が測れる理由

式 (1) が実際に電磁波の伝搬速度であることを確かめておこう．$z$ 方向に伝搬する $x$ 偏波平面波に対する Maxwell 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 E_x) = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 H_y) = -\frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (12)$$

これを解くと，d'Alembert 解 $E_x = f_\pm(z \mp c_0 t)$, $H_y = \pm Z_0^{-1} f_\pm(z \mp c_0 t)$ が得られる．任意関数 $f_\pm$ で表わされる電磁的擾乱が, 自由空間を速度 $\pm c_0 = \pm 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ で伝搬することを表している．

制限された空間での振る舞いを見るために, $z = \pm d/2$ に完全導体板を置き, Fabry-Perot 共振器を構成した場合を考えよう．境界条件 $E_x(\pm d/2, t) = 0$ から, 最低次のモードは $E_x(z,t) = E(t)\cos(\pi z/d)$, $H_y(z,t) = H(t)\sin(\pi z/d)$ となる．これらを式 (12) に代入すると, 単振動の式が得られる:

$$\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E = -\frac{\pi}{d} H, \quad \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H = \frac{\pi}{d} E \quad (13)$$

単振動の角周波数 $\omega_0 = (\pi/d)/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ から,

$$c_0 = 2d/T \quad (14)$$

が得られる．電磁波が 1 周期 $T\,(= 2\pi/\omega_0)$ の間に往復 $2d$ の距離を伝搬しているという関係から, 光速が決定できる．一般の共振器では, $d$ に相当する等価長さは複数の幾何学的パラメータで決まる．例えば, 円筒空洞共振器ではモード, 半径 $R$, 長さ $l$ に依存する．伝搬距離のイメージは失われるが, 等価長さを理論的に計算すれば、式 (14) を用いて光速が決定できる．これが空洞共振法による光速決定の原理であり, 実際, マイクロ波を用いた $c_0$ の精密測定が行われていた [1]．一方, (無損失)LC 共振器の時間発展は,

$$\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V = -\frac{1}{\Lambda} I', \quad \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I' = \frac{1}{\Lambda} V \quad (15)$$

で表わされる．ただし, $I' := \sqrt{\Lambda_C/\Lambda_L}\, I$．式 (13) と比較すると, 間隔 $d = \pi\Lambda$ の Fabry-Perot 共振器と等価であることが分かる．すなわち, 式 (11) と式 (14) が関係づけられる．

## 6 まとめ

具体的な実験は, 別稿 [6] に詳しく述べるが, 入手容易な材料と装置で光速 $c_0$ を 1% 程度の正確さで求めることができる．回路の簡単な実験ではあるが, 電磁気学の基礎に関する考察を伴うものであり, 大学レベルの物理実験に適している．電磁気学において, $c_0$, $Z_0$, $\varepsilon_0$, $\mu_0$ という 4 つの基本定数はいずれも重要であり, それらの物理的意義, 次元, 関係性, 概略値などに触れるよい機会になるだろう．さらに, 4 つの場 $E$, $B$, $D$, $H$ の物理的意味の理解にも役立つ [9]．机上で光速 $c_0$ を測り, 150 年前の Maxwell の感動を追体験できるばかりでなく, その後の電磁気学の発展も実感できる有意義な実験課題である．

貴重なアドバイス, コメントをいただいた霜田光一氏, 佐藤亨氏, 小林弘和氏, 中田陽介氏に感謝いたします．

### 参考文献と注釈

[1] 霜田光一, 歴史をかえた物理実験 (丸善, 1996).

[2] 定義されている量を測っても意味がないというのは, あまりに硬直的である．仮に, キログラム原器をキッチンスケールに載せれば, 1 kg 前後の何がしかの値が得られるであろう．現在では, $c_0$, $\mu_0$ 双方が定義値であるため, $\varepsilon_0 = c_0^2/\mu_0$ も自動的に決まり, これらの量が積極的に測定されることはない．しかし, いずれもれっきとした物理定数であり, 実測することができる．近い将来, アンペアの定義が変更されれば, $\mu_0$, $\varepsilon_0$ は定義値ではなくなる．

[3] W. Weber and R. Kohlrausch, Annalen der Physik **99**, 10 (1856).

[4] 木幡重雄, 電磁気の単位はこうして作られた (工学社, 2003).

[5] J.C. Maxwell, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **155** 459 (1865).

[6] 小林弘和, 北野正雄, 大学の物理教育 **21**, 130 (2015).

[7] SI の枠組みで, esu, emu 単位系を扱う方法を述べる．量 $X$ の単位を $\mathrm{m}^\alpha \mathrm{kg}^\beta \mathrm{s}^\gamma \mathrm{A}^\delta$ とすると, $X_{\mathrm{esu}} = \iota(1/4\pi\varepsilon_0)^{\delta/2} X$, $X_{\mathrm{emu}} = \iota(\mu_0/4\pi)^{\delta/2} X$ は, それぞれ A を含まない力学的な量になる．因子 $\iota$ は, $D$, $H$ の場合は $4\pi$, その他の場合は 1 である．

[8] Weber と Kohlrausch の実験において, 力の絶対的な値は重要ではなく, 2 種類の測定における力の比のみが意味をもつ．

[9] 北野正雄, 大学の物理教育 **21**, 73 (2015).

連絡先 Email:kitano@kuee.kyoto-u.ac.jp